CONCOURS D'ENTREE à L'ECOLE DES INGENIEURS
DE LA VILLE DE PARIS
OUVERT LE 23 AVRIL 1986

N.B. : le sujet comporte 2 pages

EPREUVE DE MATHEMATIQUES OPTION

DUREE 4 HEURES - COEFFICIENT 6

Les variables x,y... de ce problème sont toutes réelles.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynomes réels de degré inférieur ou égal à n
A tout entier n, strictement positif, on fait correspondre les intégrales :

$$I_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{t - E(t)}{t^{x+1}}\,dt \quad , \quad J_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{t - E(t) - 1/2}{t^{x+1}}\,dt$$

On pose : $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^{x+1}}\,dt$, $J(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t - E(t) - 1/2}{t^{x+1}}\,dt$

E(t) désigne la partie entière de t
On note Z(x) lorsqu'elle existe, la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad Z_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$$

On appelle I, J et Z les fonctions réelles de variable réelle définies par

$$x \longrightarrow I(x), \qquad x \longrightarrow J(x), \qquad x \longrightarrow Z(x)$$

On remarquera que les parties I, II, III, IV sont dans une grande mesure indépendantes.

PARTIE I

I 1)a) Vérifier que si x' > x et si I(x) converge, alors I(x') converge
b) Evaluer $I_n(0)$ et en déduire que I n'est pas définie en 0. I est-elle définie pour x < 0 ?
c) Préciser le domaine de définition de I

2)a) Démontrer que pour tout t > 1 et tout couple (x_0, x) tel que :

$|x - x_0| < a$, on a l'inégalité : $\left|t^{x_0 - x} - 1\right| \leq |x - x_0|\, t^a . \mathrm{Log}\, t$

b) Pour quelles valeurs de y l'intégrale : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}\, t}{t^y}\,dt$ est-elle convergente ?
c) Démontrer que si l'on a : $0 < x_0 - a < x < x_0 + a$ alors

$$\left|I(x) - I(x_0)\right| \leq |x - x_0| \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}\, t}{t^{x_0 - a + 1}}\,dt$$

En déduire la continuité de la fonction I sur son domaine de définition

3)a) Calculer $J_n(x)$ en fonction de n et x. (On traitera les cas x= 0 et x= 1 à part).
b) Déterminer un équivalent simple de $J_n(x)$, lorsque n tend vers $+\infty$ (Traiter à part les cas x=0, x=1, x=-1). Et en déduire, en fonction de x, la nature de la série de terme général $J_n(x)$
c) Déterminer le domaine de définition de la fonction J (lorsque la série de terme général $J_n(x)$ converge, on pourra utiliser la formule :

$$\int_1^y \frac{t - E(t) - 1/2}{t^{x+1}}\,dt = \sum_{k=1}^{E(y)-1} J_k(x) + \int_{E(y)}^{y} \frac{t - E(t) - 1/2}{t^{x+1}}\,dt$$

4) Déterminer une relation simple entre les intégrales I(x) . J(x) lorsqu'elles sont toutes deux convergentes

• • • ⟶

PARTIE II

II 1) Préciser le domaine de définition de la fonction Z.
2) Pour $x > 1$ évaluer $I_n(x)$ et en déduire les formules :

(1) $\quad Z(x) = -xI(x) + 1 + \frac{1}{x-1}$

(2) $\quad Z(x) = -xJ(x) + \frac{1}{x-1} + 1/2$

3) Déterminer un équivalent de Z(x) au voisinage de $x = 1$, $x > 1$
4) Montrer que Z est continue sur son domaine de définition

PARTIE III

III 1) On considère $0 < x < 1$. En évaluant $\sum_{k=1}^{n-1} I_k(x)$ à l'aide de $Z_n(x)$, démontrer que

$$Z_n(x) = \frac{n^{1-x}}{1-x} + \frac{x}{x-1} - xI(x) + o(1)$$

(On rappelle que o(1) désigne une fonction de n de limite nulle en $+\infty$)

2) Donner de même un développement asymptotique de $Z_n(1)$

3) En supposant $-1 < x < 0$, évaluer $\sum_{1}^{n} J_k(x)$ à l'aide de $Z_n(x)$ et en déduire un développement de $Z_n(x)$ de la forme :

$$Z_n(x) = an^{1-x} + bn^{-x} + c + o(1) \qquad \text{où a,b,c}$$

sont des expressions indépendantes de n que l'on déterminera en fonction de x et J(x)

PARTIE IV

IV 1) Soit x entier strictement négatif, on pose x=-p
Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}_{p+1}[X] \to \mathbb{R}_p[X]$ définie par $\varphi(P) = Q$, avec $Q(X) = P(X+1) - P(X)$
a) Vérifier que φ est linéaire, est elle injective, surjective ?
b) Démontrer l'existence et l'unicité d'un polynome P_p de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ tel que $P_p(0) = 0$ et $\varphi(P_p) = X^p$. Préciser les deux termes de plus haut degré de P_p
c) Donner une expression simple de $Z_n(-p)$ en fonction de $P_p(n+1)$

2) Soit x non entier $x < -1$, on pose $x = -(p+a)$ où p est entier et $0 < a < 1$
a) Montrer qu'à tout polynome P, on peut faire correspondre un polynome Q tel que :

$$\lim_{y \to +\infty} \left[yP(y) - \left(1 - \frac{1}{y}\right)^a yP(y-1) - Q(y) \right] = 0 \qquad (3)$$

On considère l'application $\Psi : \mathbb{R}_{p+1}[X] \to \mathbb{R}_{p+1}[X]$ définie par $\Psi(P) = Q$, Q étant définie par (3)
Vérifier que cette application est lineaire, est-elle injective ? surjective ?
b) Démontrer l'existence et l'unicité d'un polynome K_x de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ tel que $\Psi(K_x)(X) = X^{p+1}$
Déterminer les deux termes de plus haut degré de K_x
c) Démontrer que : $n^a K_x(n) - (n-1)^a K_x(n-1) - n^{-x}$ est le terme général d'une série convergente
En déduire que $Z_n(x) = n^a K_x(n) + C + o(1)$
où C est une constante que l'on ne cherchera pas à calculer.

==*=*=*=*=*=*=*=*=*=*